www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ÉCOLE NAVALE

Deuxième composition de Mathématiques

Concours 1990

Durée : 3 heures

NOTATIONS ET INTRODUCTION

Notations.

Soit $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels ; pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[x]$ de degré au plus égal à n.

On désigne par $e_0 = \alpha_0 = E_0 = F_0$ le polynôme tel que $e_0(x) = \alpha_0(x) = E_0(x) = F_0(x) = 1$ pour toute valeur réelle de x.

On considère, pour tout $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, les polynômes e_i, α_i, E_i, F_i respectivement définis par :

$e_i(x) = x^i$;

$\alpha_i(x) = (x - \alpha)^i$, pour $\alpha \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$E_i(x) = \dfrac{1}{i!} x(x-1) \ldots (x-i+1)$;

$F_i(x) = x(x-1) \ldots (x-i+1)$.

On désigne par $\mathscr{B}_0 = (e_0, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$; pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$\mathscr{B}_{n,\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$;
$\mathscr{E}_n = (E_0, \ldots, E_n)$;
$\mathscr{F}_n = (F_0, \ldots, F_n)$.

Le dual d'un espace vectoriel V dont une base est $\mathscr{B}$ sera noté V*, et $\mathscr{B}^*$ sera la base duale de $\mathscr{B}$; cette base $\mathscr{B}$ elle-même sera dite préduale de $\mathscr{B}^*$.

Si $X \subset Y$ et si f est une application d'ensemble de définition Y, on note $f\lceil_X$ la restriction de f à X.

Soit Δ l'opérateur de $\mathbb{R}[x]$ dans lui-même qui, à toute $f \in \mathbb{R}[x]$, associe Δf telle que :

$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On pose $\Delta^0 = Id$, et pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\Delta^{p+1} = \Delta^p \circ \Delta$.

On pose $\Delta_n = \Delta\lceil_{\mathbb{R}_n[x]}$ lire $\Delta_n = \Delta / \mathbb{R}_n[x]$

Soit D l'opérateur de dérivation sur $\mathbb{R}[x]$ tel que $(Df)(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Introduction.

La partie I présente une étude de Δ utile dans la suite et introduit les nombres de STIRLING de première et deuxième espèces.

En II, on calcule des sommes à l'aide de Δ.

En III, on calcule de deux façons des polynômes d'interpolation.

En IV, on établit le lien entre Δ et D.

. . . / . . .

I. — Étude de Δ et nombres de STIRLING.

I.1. Montrer que $\mathscr{E}_n$ et $\mathscr{F}_n$ sont des bases de $\mathbb{R}_n[X]$ et que Δ et Δ_n sont des applications linéaires.

Déterminer la matrice A_n de Δ_n relativement à $\mathscr{B}_0$

I.2. Déterminer la matrice B_n de Δ_n relativement à $\mathscr{E}_n$ et le plus petit entier m (dit *indice de nilpotence* de $\mathscr{B}_n$) tel que $B_n^m = 0$ (matrice nulle).

I.3. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$F_k = \sum_{i=0}^{n} s(i,k)\, e_i \qquad \text{et} \qquad e_k = \sum_{i=0}^{n} \sigma(i,k)\, F_i$$

les nombres $s(i,k)$ [resp. $\sigma(i,k)$] sont dits nombres de STIRLING de première espèce [resp. de deuxième espèce].

I.3.*a.* Déterminer pour tout $(i,k) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $1 \leqslant i \leqslant n$ et $0 \leqslant k \leqslant n-1$, le nombre $s(i,k+1)$ en fonction de $s(i-1,k)$ et $s(i,k)$.

I.3.*b.* Déterminer de même une relation de récurrence permettant de calculer $\sigma(i,k)$.

I.3.*c.* Écrire un programme de calcul, à n fixé, des $s(i,k)$ pour tout $(i,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant k \leqslant n$. Même question pour les $\sigma(i,k)$.

[Procédures PASCAL, par exemple].

I.4. On désigne par P_n la matrice de passage de $\mathscr{E}_n$ à $\mathscr{F}_n$; calculer P_5 et P_5^{-1}.

II. — Sommation à l'aide de Δ.

II.1. Déterminer $\operatorname{Ker}(\Delta_n)$ et $\operatorname{Im}(\Delta_n)$. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; soit $V = \{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0 \}$.

Montrer que $\Delta_n \restriction_V$ est un isomorphisme entre V et $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

II.2. Calculer $\widetilde{e_4}$ tel que $\Delta(\widetilde{e_4}) = e_4$

Démontrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^4 = \widetilde{e_4}(n+1) - \widetilde{e_4}(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

En déduire les réels a, b et c tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{30}(an^2 + bn + c)$.

III. — Interpolation.

III.1. Déterminer la base duale $\mathscr{B}_\alpha^* = (\alpha_0^*, \ldots, \alpha_n^*)$ de $\mathscr{B}_{n,\alpha}$ (où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) et expliciter, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, l'expression

$$P = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^*(P)\, \alpha_i$$

III.2. Soit $\mathscr{E}^* = (E_0^*, \ldots, E_n^*)$ la base duale de $\mathscr{E}$.

III.2.*a.* Expliciter $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} E_i^*(P)\, E_i$

en déterminant pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ les $E_i^*(P)$ en fonction de Δ_n et de P.

. . . / . . .

III.2.*b.* On suppose qu'un polynôme Q de degré q de $\mathbb{R}_n[x]$ prend pour $(q+1)$ entiers consécutifs de $\mathbb{Z}$ des valeurs entières. Montrer que Q prend, pour les valeurs entières de la variable, des valeurs entières (autrement dit : montrer que $Q(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$).

III.3. Soit $\Psi_x : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\Psi_x(P) = P(x)$. On pose

$$\Psi_0 = L_0^*, \ldots, \Psi_i = L_i^*, \ldots, \Psi_n = L_n^*$$

III.3.*a.* Montrer que $\mathscr{L}^* = (L_0^*, \ldots, L_n^*)$ est une base de $(\mathbb{R}_n[x])^*$ dont on déterminera la base préduale, qui sera notée $\mathscr{L} = (L_0, \ldots, L_n)$.

III.3.*b.* En utilisant $\mathscr{L}$, déterminer sous forme canonique un polynôme T de degré 3 dont le graphe contienne les points

$\left(i, \sum_{j=0}^{j=i} j^4\right)$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

III.4. Retrouver le polynôme T de III.3.*b.* en utilisant l'expression explicitée en III.2.*a.*

Comparer T(20) au résultat $\sum_{j=1}^{j=20} j^4$, qu'on pourra calculer à l'aide du résultat de II.2.

IV. — Lien entre Δ et D.

(Les opérations D et Δ sont définies au paragraphe « Notations »).

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$D E_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i-1}}{i} D E_{k-i}$$

En déduire que $D = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} \Delta^i$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail